

DOI 10.36074/logos-13.03.2026.021

## СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН, СТРИЖНІВ

Тодчук Володимир Олександрович<sup>1</sup>

---

1. кандидат технічних наук, доцент, пенсіонер  
Харків, УКРАЇНА

---

### Введення.

Втрата стійкості конструкції в цілому або окремих її елементів (оболонок, пластин і стрижнів) є однією з причин вичерпання несучої здатності інженерних споруд. Однак точних формул для критичних сил оболонок і пластин немає. У цій статті показано, що такі формули можливо отримати в рамках лінійної теорії.

В 1744 році Л. Ейлер [1] розробив теорію, сформулював статичний критерій стійкості і отримав формулу для критичної сили прямолінійного стрижня

$P = EI \frac{\pi^2}{L^2}$ . Відповідно до статичного критерію Ейлера критичне навантаження

визначається як найменше навантаження, при якому поряд з вихідною (прямолінійною) формою рівноваги статично можлива сусідня нескінченно близька до неї криволінійна форма рівноваги. Вважається, що під час переходу від прямолінійної до криволінійної форми рівноваги критичне навантаження не змінюється, тобто  $N_* = const$ .

Використавши енергетичний метод і статичний критерій Ейлера, Браун в 1891 році [2] розв'язав задачу стійкості прямокутної шарнірно обпертої пластини, зжатої в одному напрямку.

В лінійній постановці з використанням статичного критерію Ейлера

С. П. Тимошенко [3] (1910 - 1914) розв'язав задачу стійкості шарнірно обпертої кругової циліндричної оболонки при осьовому стисканні і отримав формулу оболонки. Однак експериментальні дані сильно відрізняються від критичних навантажень розрахованих по формулі (1), які називають верхніми критичними навантаженнями.

$$N_g = Eh^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)} R, \quad (1)$$

де:  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона;  $h$  - товщина,  $R$  - радіус

В подальшому всі зусилля були направлені на пошук причин цієї різниці. Розвиток теорії стійкості оболонок йшов у різних напрямках. Детальний аналіз цих напрямків проведено в [4,5,6].

Один із двох основних напрямків пов'язаний з рекомендаціями розв'язувати задачу в нелінійній постановці та оцінювати стійкість від нижнього критичного навантаження. Ці рекомендації виявилися помилковими.

Другий напрямок пов'язаний з дослідженням впливу початкових недосконалостей на величину критичного зусилля. Експериментальне дослідження 44 циліндричних оболонок [7] показує реальний вплив початкових недосконалостей на стійкість циліндричних оболонок. На основі отриманих результатів зроблено висновок, що початкові недосконалості поверхні оболонки не є причиною великої різниці між верхніми критичними навантаженнями та експериментальними даними.

Численні дослідження стійкості оболонки на основі статичного критерію Ейлера позитивних результатів не дали. Необхідно шукати нові підходи вирішення проблеми.

### 1. Постановка задачі.

Один із можливих підходів запропоновано в [8], де без використання статичного критерію Ейлера вирішуються проблеми стійкості тонкостінних круглих циліндричних оболонок і прямокутних пластин. По-іншому, порівняно із класичним підходом, описується поведінка системи зовнішнє навантаження – оболонка (пластина, стрижень) при переході з докритичної прямолінійної до закритичної криволінійної форми рівноваги. Запропонований підхід описує процес вигину таким чином. Під час прогинання краї оболонки залишаються на місці, оскільки зближення кромки за рахунок радіальних переміщень компенсується подовженням твірних оболонок. При цьому зменшуються стискаючі сили і стають рівними  $N_* - N_1$ . Відбувається перерозподіл енергії стиснення, накопиченої в докритичному стані. Енергія стиску зменшується, з'являються енергії згину і зсуву, але потенціальна енергія оболонки не змінюється тобто, додаткова енергія  $\Delta V = 0$ . Оскільки торцевих переміщень немає, додаткова робота сил  $N_* - N_1$   $\Delta A = 0$ . Потенціал системи  $U = const$  оскільки  $\Delta U = \Delta V - \Delta A = 0$ . Для визначення критичних сил використовуються умови  $\partial \Delta U / \partial f_i = 0$ . Таким чином, виконуються: загальна теорема механіки, початок можливих переміщень Ж. Лагранжа (1788) і принцип Лежена-Діріхле (1846), які лежать в основі енергетичного методу. Виходячи з цього, робимо висновок про наявність усіх



### 섹션 13.

#### GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

передумов для використання запропонованого підходу при визначенні критичних навантажень тонкостінних конструкцій. Покажемо використання цього підходу до оболонок, пластин і стрижнів.

#### 2. Оболонки.

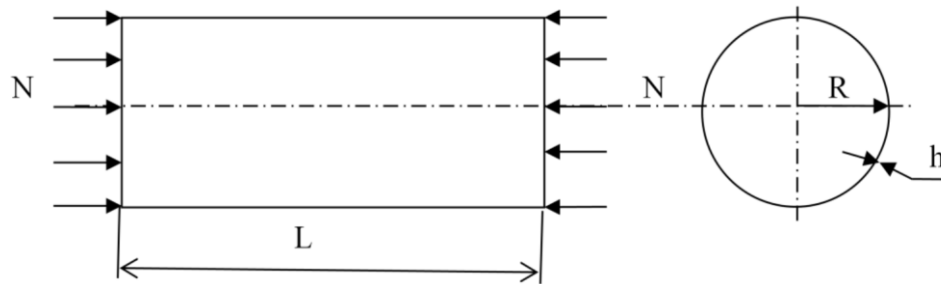


Рис. 1. Циліндрична оболонка

#### Оболонки з шарнірно закріпленими краями

Циліндрична оболонка довжиною  $L$ , радіусом  $R$ , товщиною стінки  $h$  навантажена по краях рівномірно розподіленими стискаючими зусиллями  $N$ . Вихідні передумови: оболонка геометрично ідеальна, ідеально пружна, безмоментний докритичний стан, краї оболонки шарнірно закріплені. Граничні умови:  $u(0) = v(0) = w(0) = \partial^2 w(0) / \partial x^2 = 0$ ;  $u(L) = v(L) = w(L) = \partial^2 w(L) / \partial x^2 = 0$ . Для успішного вирішення задачі дуже важливо правильно підібрати переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $w$  серединної поверхні оболонки в напрямку координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Вони повинні не тільки відповідати граничним умовам, а й максимально збігатися з реальними переміщеннями при прогинанні. Розбіжність між апроксимованою та реальною поверхнею еквівалентна накладенню додаткових зв'язків, які підвищують жорсткість оболонки, що призводить до завищення значень теоретичних критичних навантажень. Переміщення  $v$  і  $w$  задамо у вигляді тригонометричних функцій

$$v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \quad w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \quad (2.1)$$

де:  $f_2, f_3$  - амплітуди переміщень  $v$  і  $w$ ;  $m$  - кількість півхвиль по довжині оболонки;  $n$  - кількість хвиль в окружному напрямку.

Згідно з наведеним вище описом процесу вигину, переміщення  $u$  повинні мати чіткий зв'язок з радіальними переміщеннями  $w$ , дорівнювати нулю на навантажених краях і дозволяти враховувати зміну зовнішнього

навантаження під час прогинання. Для задоволення цих вимог пропонується знаходити зміщення  $u$  наступним чином. Нехай

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = f(x, y); \quad u = -\frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int f(x, y) dx. \quad (2.2)$$

Виконуючи умови  $u(0) = u(L) = 0$  при  $u(x, y) \neq 0$ , отримуємо

$$f(x, y) = \frac{1}{2} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}; \quad u = \frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{L} \sin 2 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (2.3)$$

Зміна потенціальної енергії деформації оболонки

$$\Delta V = \frac{Rh}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^R \left\{ \varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}^2 + \frac{h^2}{12} [\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2] \right\} dx dy, \quad (2.4)$$

де: 
$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{R\partial y}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial v}{R\partial x}.$$

З (2.4) отримуємо 
$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{3}{16} f_3^4 \frac{\lambda^2}{R^2} a_4 + f_2^2 a_1 + 2f_2 f_3 a_2 + f_3^2 a_3 \right] \frac{\pi L}{4R}, \quad (2.5)$$

де: 
$$a_1 = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left[ 2(1-\nu)\lambda^2 + n^2 \right];$$

$$a_2 = n \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left[ (2-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right];$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2; \quad a_4 = \lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2; \quad \lambda = \frac{m\pi R}{L}.$$

Додаткова робота осевого стиску 
$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^R \left( N_* - \frac{1}{2} N_1 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (2.6)$$

$N_1$  чисельно дорівнює і протилежно направлене внутрішнім навантаженням на краях оболонки, тобто  $N_1 = -T_1(0) = -T_1(L)$  ;

섹션 13.

GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

$$N_1 = -\frac{Eh}{1-\nu^2} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cos^2 \frac{n\gamma}{R}. \quad (2.7)$$

з (2.6) отримуємо 
$$\Delta A = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{3}{16} f_3^4 \frac{\lambda^4}{R^2} + \frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh} f_3^2 \lambda^2 \right) \frac{\pi L}{4R}, \quad (2.8)$$

а з  $\Delta A = 0$  находимо 
$$\frac{3}{16} f_3^2 \frac{\lambda^2}{R^2} = -\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh}. \quad (2.9)$$

$$\Delta U = \Delta V - \Delta A;$$

$$\Delta U = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{3}{16} f_3^4 \frac{\lambda^2}{R^2} \frac{1-\nu}{6} n^2 + f_2^2 a_1 + 2f_2 f_3 a_2 + f_3^2 \left( a_3 - \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \lambda^2 \right) \right]. \quad (2.10)$$

**Величина критичних зусиль  $N_*$  залежить від того коли використовуємо 2.9, до чи після варіації  $\frac{\Delta U}{\partial f_i} = 0$ .**

**Варіант 1.** В (2.10) спочатку замінюємо  $\frac{3}{16} f_3^2 \frac{\lambda^2}{R^2}$  на  $-\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh}$ , а потім з умов

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial f_2} = 0, \frac{\partial \Delta U}{\partial f_3} = 0 \text{ отримуємо } N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{a_4} \left( a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right); \bar{N}_* = \frac{N_*}{N_6}. \quad (2.11)$$

$\bar{N}_*$

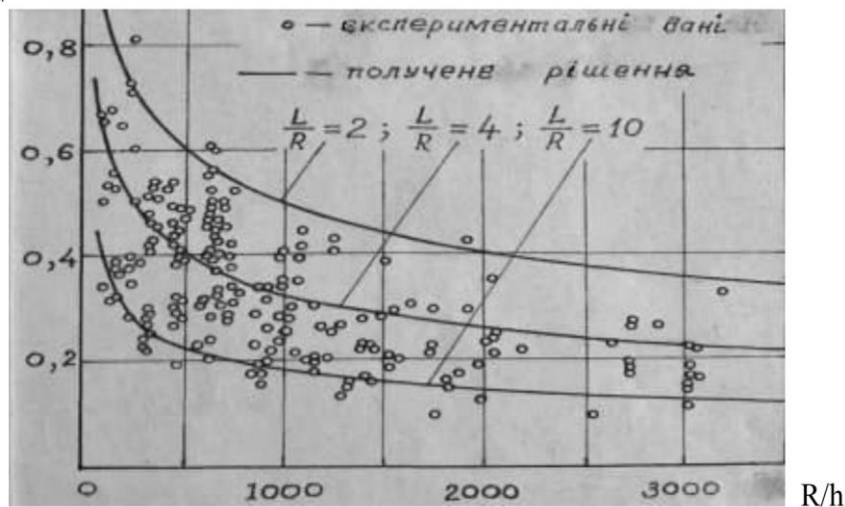


Рис. 2. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  шарнірно обпертої оболонки (варіант 1).

На Рис.2 показані результати мінімізації  $\bar{N}_*$  по  $m$  і  $n$  при  $\nu = 0,3$  (варіант1) і експериментальні дані, які взяті з американських журналів Ракетна техніка і космонавтика та Прикладна механіка.

**Варіант 2.** В (2.10) спочатку виконуємо умови  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_2} = 0$ ,  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_3} = 0$ , а потім

замінюємо  $\frac{3}{16} f_3^2 \frac{\lambda^2}{R^2}$  на  $-\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh}$  і отримуємо

$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{a_5} \left( a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right); \text{ де } a_5 = \lambda^2 + \frac{1-\nu}{3} n^2. \quad (2.12)$$

Результати мінімізації  $\bar{N}_*$  по  $m$  і  $n$  при  $\nu = 0,3$  наведено на Рис.3.

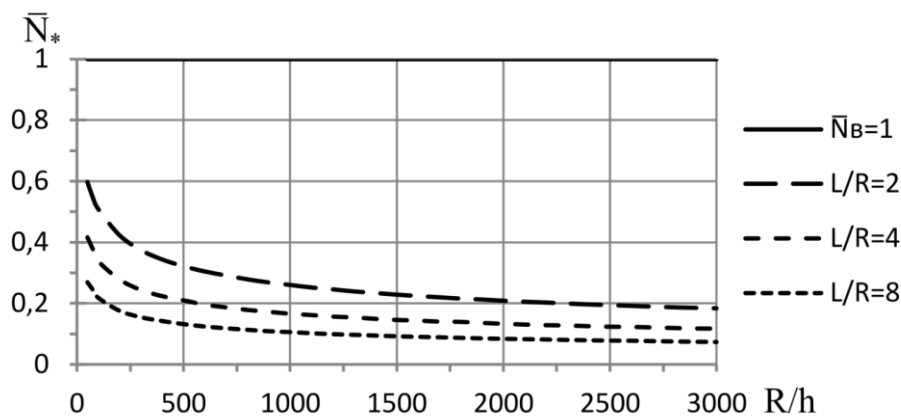


Рис. 3. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  шарнірно обпертої оболонки (варіант 2).

Отримані результати дають відповідь на питання: чому при одному і тому ж параметрі  $R/h$  відомі дані експериментів значно відрізняються? Наприклад в [5], при  $R/h = 400$   $\bar{N}_*$  змінюється від 0,2 до 0,6. Це – вплив параметра  $L/R$ .

Виникає питання : яку формулу використовувати для теоретичних розрахунків критичних навантажень? Правильну відповідь могли б дати ретельно поставлені і виконані експериментальні дослідження впливу параметра  $L/R$  на стійкість оболонок. На користь варіанту 2 і формули (2.12) говорить той факт, що це іде в запас стійкості оболонки.

Отже, для точних розрахунків стійкості критичних навантажень оболонок, необхідно ретельно враховувати їхні геометричні параметри  $L/R$  і  $R/h$ , а також механічні характеристики  $E$  і  $\nu$ .

섹션 13.

GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

**Оболонки з жорстко закріпленими краями**

Граничні умови :

$$u(0) = v(0) = w(0) = \partial w(0) / \partial x = 0; u(L) = v(L) = w(L) = \partial w(L) / \partial x = 0;$$

$$u = \frac{1}{2} f_3^2 \frac{m\pi}{L} \sin 4 \frac{m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}; v = f_2 \left( 1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{ny}{R};$$

$$w = f_3 \left( 1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \frac{ny}{R};$$

**Варіант 1.** 
$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{b_4} \left( b_3 - \frac{b_2^2}{b_1} \right); \bar{N}_* = \frac{N_*}{N_6}; \quad (2.13)$$

$$b_1 = 2(1-\nu)\lambda^2 + 3n^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 [8(1-\nu)\lambda^2 + 3n^2]; b_2 = n \left\{ 3 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 [4(2-\nu)\lambda^2 + 3n^2] \right\};$$

$$b_3 = 3 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 [16\lambda^4 + 8\lambda^2 n^2 + 3n^4]; b_4 = 4\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2.$$

Результати розрахунків за допомогою (2.13) показані на Рис.4.

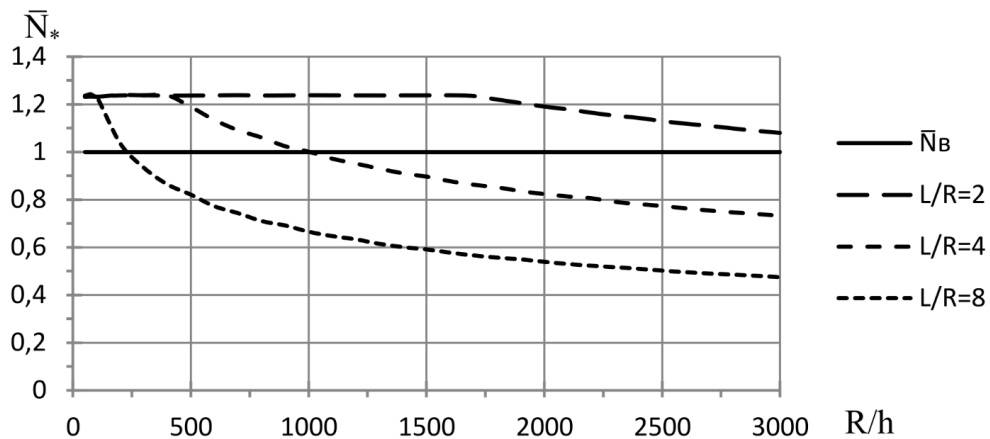


Рис. 4. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  жорстко закріпленої оболонки (варіант 1)

**Варіант 2.** 
$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{b_5} \left( b_3 - \frac{b_2^2}{b_1} \right); b_5 = 4\lambda^2 + \frac{1-\nu}{3} n^2. \quad (2.14)$$

Результати розрахунків за допомогою (2.14) показані на Рис.5

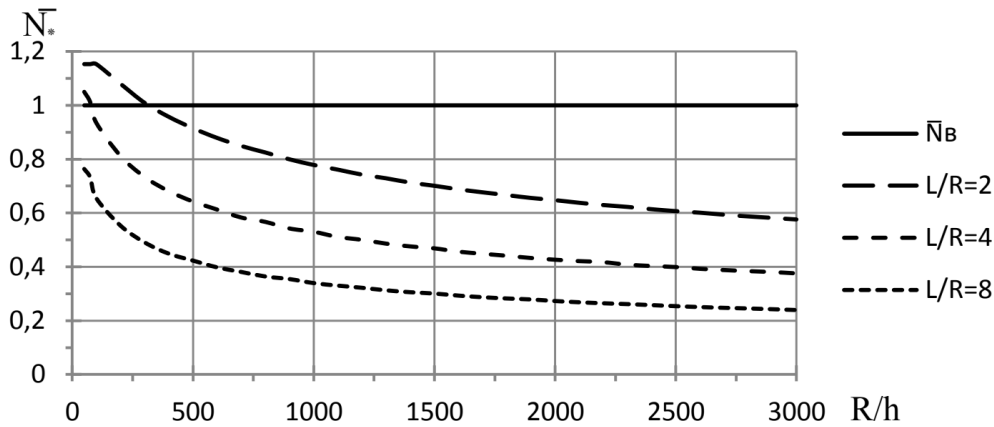


Рис. 5. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  жорстко закріпленої оболонки (варіант 2).

### 3. Пластини.

#### Пластини з шарнірно обпертими сторонами

Брайан в [2] розв'язав задачу стійкості прямокутної шарнірно обпертої пластини, зжатої в одному напрямку і отримав формулу для її критичних навантажень

$$N_x = D \frac{\pi^2}{b^2} k; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad k = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2, \quad (3.1)$$

де:  $a$  – довжина пластини;  $b$  – ширина пластини;  $m$  – кількість півхвиль.

Використовувався енергетичний метод і статичний критерій Ейлера. Нижче приведено рішення цієї задачі на основі запропонованого підходу. Граничні умови :

$$u(0, a) = v(0, a) = w(0, a) = \frac{\partial^2 w(0, a)}{\partial x^2} = 0; \quad u(0, b) = v(0, b) = w(0, b) = \frac{\partial^2 w(0, b)}{\partial y^2} = 0.$$

$$u = \frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}; \quad v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Зміна потенціальної енергії деформації пластини

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}^2 + \frac{h^2}{12} \left[ \chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2 \right] \right\} dx dy,$$

섹션 13.

GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

$$\text{де: } \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{16} f_3^4 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{6} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + f_2^2 \left[ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \\ f_3^2 \frac{h^2}{12} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \end{array} \right\} \frac{ab}{8}.$$

$$\text{Додаткова робота осьового стиску } \Delta A = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left( N_* - \frac{1}{2} N_1 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy ;$$

$$N_1 = -\frac{Eh}{1-\nu^2} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{ny}{R};$$

$$\Delta A = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{3}{16} f_3^4 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \frac{ab}{8}.$$

$$\text{З } \Delta A = 0 \text{ отримуємо } \frac{3}{16} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 = -\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh}.$$

**Варіант 1.** Після заміни  $\frac{3}{16} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2$  на  $-\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh}$  в  $\Delta U = \Delta V - \Delta A$  і

виконання умов  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_2} = 0$ ,  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_3} = 0$  отримуємо

$$N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_1; k_1 = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \left/ \left[ 1 + \frac{1-\nu}{6} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] \right. . \quad (3.2).$$

**Варіант 2.** Виконуємо умов  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_2} = 0$ ,  $\frac{\partial \Delta U}{\partial f_3} = 0$ , а потім робимо заміну

$$\frac{3}{16} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \text{ на } -\frac{N_*(1-\nu^2)}{Eh} \text{ отримуємо}$$

$$N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_1; k_1 = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \left/ \left[ 1 + \frac{1-\nu}{3} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] \right. . \quad (3.3)$$

В (3.1), (3.2) враховано, що  $N_*$  буде мінімальним при  $n = 1$ .

**Пластини шарнірно обперті по нагрудженим краям і жорстко закріплені по ненагрудженим краям**

Граничні умови:

$$u(0, a) = v(0, a) = w(0, a) = \frac{\partial^2 w(0, a)}{\partial x^2} = 0; u(0, b) = v(0, b) = w(0, b) = \frac{\partial w(0, b)}{\partial y} = 0.$$

$$u = \frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 2 \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \cos 2 \frac{n\pi y}{b}\right)^2; v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \cos 2 \frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$w = f_3 \sin \frac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos 2 \frac{m\pi y}{b}\right).$$

**Варіант 1.**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_2; k_2 = \left[ 3 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 3,2 + 16 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 3 + 0,6 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right].$  (3.4)

**Варіант 2.**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_2; k_2 = \left[ 3 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 3,2 + 16 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 3 + 1,2 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right].$  (3.5)

**Пластини жорстко закріплені по нагрудженим краям і шарнірно обперті по ненагрудженим краям**

Граничні умови:

$$u(0, a) = v(0, a) = w(0, a) = \frac{\partial w(0, a)}{\partial x} = 0; u(0, b) = v(0, b) = w(0, b) = \frac{\partial^2 w(0, b)}{\partial y^2} = 0.$$

$$u = \frac{1}{2} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 4 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}; v = f_2 \left(1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$w = f_3 \left(1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{a}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

**Варіант 1.**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_3; k_3 = \left[ 16 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 8 + 3 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 4 + \frac{1-\nu}{6} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right];$  (3.6)

**Варіант 2.**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_3; k_3 = \left[ 16 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 8 + 3 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 4 + \frac{1-\nu}{3} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right].$  (3.7)

**Пластини жорстко закріплені зі всіх сторін**

Граничні умови:

$$u(0, a) = v(0, a) = w(0, a) = \frac{\partial w(0, a)}{\partial x} = 0; u(0, b) = v(0, b) = w(0, b) = \frac{\partial w(0, b)}{\partial y} = 0;$$

$$u = \frac{1}{2} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 4 \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \cos 2 \frac{n\pi y}{b}\right)^2; v = f_2 \left(1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos 2 \frac{n\pi y}{b}\right);$$



섹션 13.

GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

$$w = f_3 \left( 1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right).$$

**Варіант 1**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_4; k_4 = \left[ 12 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 8 + 12 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 3 + \frac{51(1-\nu)}{70} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right]$  (3.8)

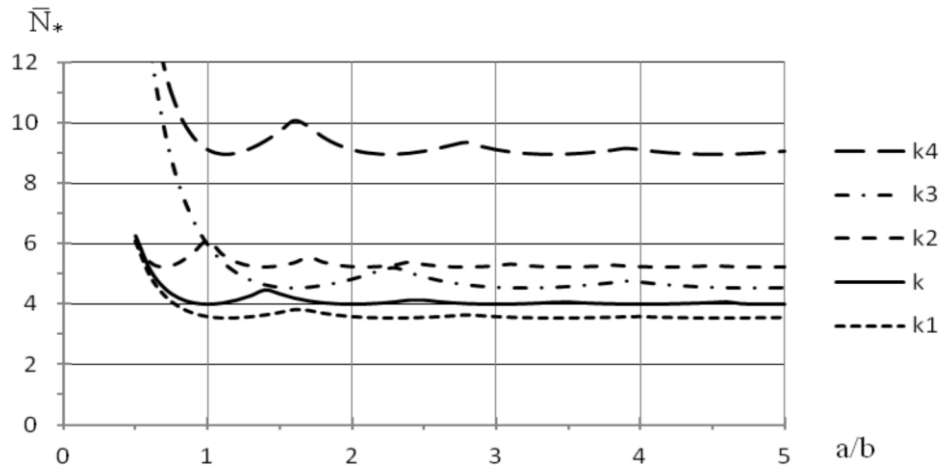


Рис. 6. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  пластин (варіант 1).

**Варіант 2**  $N_* = D \frac{\pi^2}{b^2} k_4; k_4 = \left[ 12 \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 8 + 12 \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] / \left[ 3 + \frac{51(1-\nu)}{35} \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right]$ . (3.9)

Результати розрахунків  $k_1, k_2, k_3, k_4$  по формулам (3.2, 3.4, 3.6, 3.8) (варіант 1) приведені на Рис 6, а по формулам (3.3, 3.5, 3.7, 3.9) (варіант 2) на Рис. 7. На Рис.6 і Рис. 7 також нанесені розрахунки  $k$  по формулі 3.1.

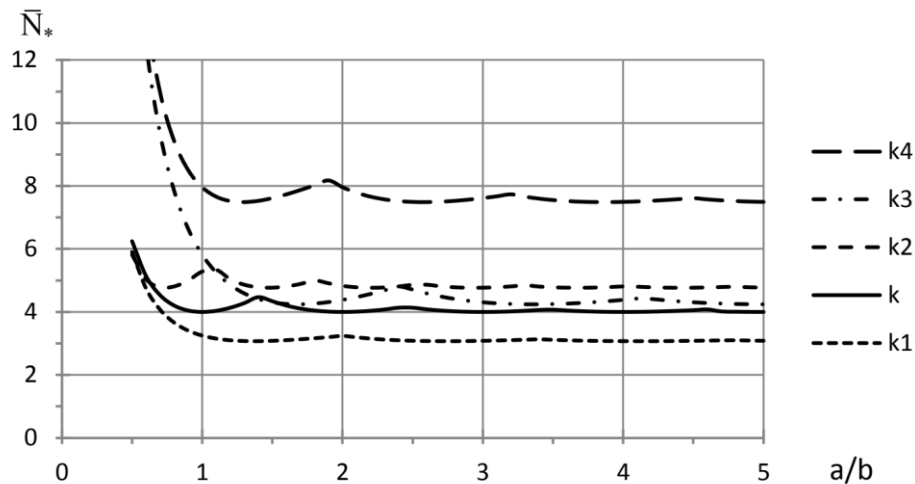


Рис. 7. Критичні навантаження  $\bar{N}_*$  пластин (варіант 2).

#### 4.Стрижні.

Довгий час (150 років) правильність теорії (статичного критерію Ейлера) і формули Ейлера  $P = EI \frac{\pi^2}{L^2}$  були під сумнівом. Ретельно проведені досліді І.

Баушінгера (1887), М. Конкура (1891), Л. Тетмайєра (1890, 1896) показали хорошу узгодженість теоретичних і експериментальних даних і поклали кінець епосі сумнівів у теорії та формулі Ейлера. Вважалось, що ефективність статичного критерію Ейлера доведена. Очевидно Брайан і Тимошенко були такої ж думки. Вони використали статичний критерій Ейлера для визначення критичних навантажень пластин і оболонки. Приведені вище рішення показали, що це помилка.

Проведемо рішення стійкості стрижня на основі запропонованого підходу.

#### Шарнірно обпертий стрижень при осьовому стисканні

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; u = \frac{1}{4} f^2 \frac{m\pi}{L} \sin 2 \frac{m\pi x}{L}; w = f \sin \frac{m\pi x}{L}; \chi = -\frac{d^2 w}{dx^2};$$

$$\Delta V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EF \varepsilon^2 + EI \left( \frac{dw}{dx} \right)^4 \right] dx; \Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \left( P - \frac{1}{2} P_1 \right) \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx; P_1 = -\frac{1}{2} f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2;$$

$$\Delta V = \left[ \frac{1}{4} EF f^4 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + EI f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \right] \frac{L}{4}; \Delta A = \left[ \frac{1}{4} EF f^4 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + P f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{L}{4}.$$

З  $\Delta U = \Delta V - \Delta A = 0$  отримуємо формулу Ейлера  $P = EI \frac{\pi^2}{L^2}$ .

#### Жорстко закріплений стрижень при осьовому стисканні

$$w = f \left( 1 - \cos 2 \frac{m\pi x}{L} \right), u = \frac{1}{2} f^2 \frac{m\pi}{L} \sin 4 \frac{m\pi x}{L}.$$

$$\Delta V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EF \varepsilon^2 + EI \left( \frac{dw}{dx} \right)^4 \right] dx; \Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \left( P - \frac{1}{2} P_1 \right) \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx; P_1 = -2 f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2.$$

$$\Delta V = \left[ 4 EF f^4 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + 16 EI f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \right] \frac{L}{4}; \Delta A = \left[ 4 EF f^4 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + 4 P f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{L}{4}.$$

З  $\Delta U = \Delta V - \Delta A = 0$  отримуємо  $P = 4 EI \frac{\pi^2}{L^2}$ , що співпадає рішеннями інших

авторів.



### 섹션 13.

#### GENERAL MECHANICS AND MECHANICAL ENGINEERING

Це підтверджує ефективність запропонованого підходу і, що статичний критерій Ейлера для стрижнів справедливий.

#### Результати

1. Отримані формули для осьових критичних навантажень кругових циліндричних оболонок і прямокутних пластин, результати розрахунку яких добре узгоджуються з експериментальними даними.

2. Виявлено вплив на величину критичних навантажень не тільки  $R/h$ , а і  $L/R$ .

#### Висновки

Аналіз отриманих результатів дозволяє стверджувати:

1. Ефективність запропонованого підходу доказана.

2. Основною причиною розбіжності між теоретичними та експериментальними критичними навантаженнями є некоректна інтерпретація процесів, що відбуваються в системі зовнішнє навантаження – оболонка (пластина) при прогинанні. Іншими словами: використання статичного критерію Ейлера для знаходження критичних зусиль оболонок і пластин – **помилка**.

3. Запропонований підхід можна використовувати для дослідження стійкості тонкостінних оболонок, пластин і стрижнів.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

- [1] *Euler L.* (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas...*, //Lausanne et Geneve, Additamentum 1: De cursives elasticis, P. 267
- [2] *Bruan G.H.* (1891)// Proc. London. Math.Soc., voi.22, P. 54
- [3] *Timoshenko S. P.* (1914). К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки.[ On the Deformation and Stability of a Cylindrical Shell]// Vestn. Technology Island, vol. 21, from 785 to 792; Izv. Petrograd. elektrotekh. inta, 1914, vol. 11, P.. 267 – 287
- [4] *Вольмир А. С.* (1976). Устойчивость деформируемых систем.// М., Наука, P. 984
- [5] *Григолюк Э.И., Кабанов В, В.* Устойчивость оболочек. //М., Наука, P.359
- [6] *Тимошенко С.П.* (1971). Устойчивость стержней, пластин и оболочек. //М., Наука, P. 807
- [7] *Todchuk V. A.* (2021). Experimental investigation of the stability of cylindrical shells reinforced with stringers under axial compression.// Proceedings of the NAU, no 1, P. 28-34.
- [8] *Тодчук В. А.* (2017). Об одном подходе к определению критических нагрузок оболочек, пластин и стержней.// Матеріали 18-ї Міжнародної науково -технічної конференції. ( 29 червня – 1 липня 2017, Київ, С. 49-51).